

Πέμπτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις (με αιτιολόγηση) ως αληθείς ή ψευδείς.

Δίνεται μία τυχαία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n -τάξης με διάστημα ορισμού το $(0, +\infty)$ και ένα σύνολο λύσεων αυτής S τέτοιο, ώστε να έχει ορίζουσα Wronski W_S ίση με το έτος γέννησής σας (ΕΓ). Τότε,

- (i) υπάρχει σύνολο λύσεων S_1 τέτοιο, ώστε $W_{S_1}(ΕΓ) = ΕΓ$.
- (ii) υπάρχει σύνολο λύσεων S_2 τέτοιο, ώστε $W_{S_2}(ΕΓ) = ΕΓ$ και $W_{S_2}(2021) = 2021$.
- (iii) υπάρχει σύνολο λύσεων S_3 τέτοιο, ώστε $W_{S_3}(ΕΓ)W_{S_3}(2021) = ΕΓ - 2021$.
- (iv) υπάρχει σύνολο λύσεων S_4 τέτοιο, ώστε η W_{S_4} να είναι φραγμένη συνάρτηση στο $(0, +\infty)$.

Θέμα 2

(i) Εξετάστε αν το σύνολο $S = \{1, \cos x, \sin x\}$ είναι βασικό σύνολο λύσεων κάποιας γραμμικής και ομογενούς διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξης και αν ναι, τότε να τη βρείτε. Επίσης, για τη διαφορική εξίσωση (αν υπάρχει) για την οποία το S είναι βασικό σύνολο λύσεων να εξετάσετε αν υπάρχουν φραγμένες, ταλαντούμενες, συγκλινουσες (όταν $x \rightarrow +\infty$) λύσεις σε πραγματικό αριθμό ή θετικού προσήμου. Είναι κάθε λύση της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης φραγμένη;

(ii) Για τη διαφορική εξίσωση

$$x^4 y'' + x^3 y' + (e^{-2x} + \log ax)y = 0, x > 0, a > 0.$$

Αν y_1, y_2 λύσεις της παραπάνω εξίσωσης τέτοιες ώστε

$$y_1(1) = 1, y_1'(1) = -1 \text{ και } y_2(1) = 0, y_2'(1) = 2,$$

τότε

- (a) να εξετάσετε αν οι y_1 και y_2 συνιστούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης.
- (b) να υπολογίστε την ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 στο $(0, +\infty)$.
- (c) να βρείτε μία λύση y της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης η οποία να πληροί τις συνθήκες $y(1) = 2$ και $y'(1) = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ